158. Closure ニ関スル一定理

泉　信一（東北大）

$\{y^n\}$ が任意ノ區間ニ於テ L^2-closed ナコトハヨク知ラレテヰル、之ヲ無限區間ノ場合ニ擴張スルノが本論文ノ目的デアル。

1. $\delta(y)$ が $(0, \infty)$ デ定義サレタ正函數デ

$$\delta(y) \geqq \frac{A}{1+y^{\varepsilon}}, \quad y>0 \tag{1}$$

トナル様ナ $A>0$ 及ビ $\varepsilon>0$ が存在スルトシ，且ツ $y \to \infty$ ノトキ $\delta(y) \downarrow 0$ トスル。

任意ノ有限區間デ二乗が可積分デ且 $|y| \to \infty$ ノトキ

$$f(y)=O(e^{-|y|\delta(|y|)}) \tag{2}$$

ヲ滿足スル函數 $f(y)$ ノ class ヲ $\mathfrak{Y}$ トスル．從ッテ $\mathfrak{Y} \subset L^2(-\infty, +\infty)$.

$f(y) \in \mathfrak{Y}$ ニ對シテ

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^n f(y)\,dy=0, \quad n=0,1,2,\cdots\cdots \tag{3}$$

ガ成立スルトキ，$f(y)$ ガ null（乃チ殆ンドスベテノ点デ零ニ等シイ）ナラバ，$\{y^n\}$ ハ $(-\infty, +\infty)$ ニ於テ $\mathcal{Y}$ ニ関シテ closed デアルトイフ。

定理．$\{y^n\}$ ガ $(-\infty, +\infty)$ ニ於テ $\mathcal{Y}$ ニ関シテ closed ナルタメノ必要且ツ十分ナ條件ハ

$$\int_0^\infty \frac{\delta(y)}{1+y}\,dy \tag{4}$$

ノ發散スルコトデアル。

之レト同種ノ定理ガ，本年四月ノ年會デ竹中博士ニヨッテノベラレタ、竹中博士ノハ de la Vallée Ponesin ノ方法ヲ用ヒルノデアル。

コノ定理ハ Ingham, Journ. London Math. Soc., 9 (1934), pp. 29—32 ニ含マレテヲル。次ニ Ingham ニナラッテ定理ヲ証明シヨウ。

2．豫備定理．(4) ガ收斂スルトキ，任意ノ區間 (a, b) ニ對シテ

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,e^{xyi}\,dy \tag{5}$$

ガ (a, b) ニ於テ null デナク且ツ (a, b) 外デハ恒等的ニ零トナルヤウナ $f(y) \in \mathcal{Y}$ ガ存在スル。

証明ハ Ingham ノ前述ノ論文 p. 29 ノ下カラ二行目ニ始マリ、次頁ノ下カラ八行目ニ終ル。

定理ノ條件ノ必要ナコトヲ示スタメニ，(4) ガ收斂スル

トスル．然ルトキ豫備定理カラ，(5) ガ (a, b) $(b>a>0)$ ノ外デ殆穿的ニ零デ，(a, b) デハ null デナイヤウナ $f(y) \varepsilon \mathfrak{F}$ ガ存在スル．從ツテ $f(y)$ ハ null デナイ．

更ニ

$$g^{(\nu)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(iy)^{\nu} f(y) e^{xyi} dy \qquad (6)$$

及ビ

$$0 = g^{(\nu)}(0) = \frac{i^{\nu}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y^{\nu} f(y)\, dy \qquad (6')$$

故ニ $\{y^n\}$ ハ closed デナイ．故ニ定理ノ條件ハ必要デアル。

次ニ定理ノ條件ノ十分ナコトヲ示スタメニ，(3) ガ成立シ且ツ (4) ガ發散スルトスル。更ニ (1) カラ

$$\delta(y) \geqq \frac{2}{y^{\varepsilon}}, \qquad y > 1$$

トシテモヨイ．然ルトキ $|y| \to \infty$ ナラバ

$$f(y) = O\left(e^{-2|y|^{1-\varepsilon}}\right) \qquad (7)$$

(2) 及ビ (6) カラ

$$|g^{(\nu)}(x)| \leqq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} |y|^{\nu} \cdot |f(y)|\, dy \leqq K\int_{0}^{\infty} y^{\nu} e^{-y\delta(y)} dy$$

$$= K A_{\nu}, \text{ say.}$$

コヽニ K ハ定數デアル。

今 $\alpha > \frac{1}{1-\varepsilon}$，$\nu_1 = \nu^{\alpha}$ トオクトキ，(2) 及ビ (7) カラ

$$A_\nu=\int_0^{\nu_1}+\int_{\nu_1}^{\infty} y^\nu e^{-y\delta(y)}\,dy$$

$$\leqq \nu_1\int_0^{\nu_1} y^{\nu-1}e^{-y\delta(\nu_1)}\,dy+e^{-\nu_1^{1-\varepsilon}}\int_{\nu_1}^{\infty} y^\nu e^{-y^{1-\varepsilon}}\,dy$$

$$<\nu_1\int_0^{\infty} y^{\nu-1}e^{-y\delta(\nu_1)}\,dy+\frac{e^{-\nu_1^{1-\varepsilon}}}{1-\varepsilon}\int_0^{\infty} y^{\frac{\nu+\varepsilon}{1-\varepsilon}}e^{-y}\,dy$$

$$<\nu_1\left(\frac{\nu}{\delta(\nu_1)}\right)^{\nu}+\left(\frac{\nu+\varepsilon}{1-\varepsilon}\,e^{-(1-\varepsilon)\frac{\nu_1^{1-\varepsilon}}{\nu+\varepsilon}}\right)^{\frac{\nu+\varepsilon}{1-\varepsilon}}$$

右辺ノ第一項ハ $\nu\to\infty$ ノトキ ∞ トナリ，第二項ハ 0 ニ近ヅク、故ニ

$$A_\nu\leqq\left(\frac{2\nu}{\delta(\nu^\alpha)}\right)^{\nu},\qquad \nu\geqq\nu_0$$

トナル様ナ ν_0 ガアル。

然ルニ (4) ノ発散スルコトカラ

$$\int_1^{\infty}\frac{\delta(u^\alpha)}{u}\,du$$

ガ発散スル. 故ニ $\delta(u)$ ノ単調減少ナコトカラ, $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\dfrac{\delta(\nu^\alpha)}{\nu}$ モ発散シ, 従ッテ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[\nu]{A_\nu}}$ モ亦発散スル. 故ニ Denjoy ノ定理カラ $g(x)$ ハ *quasi-analytic* デアル. 故ニ (3) 及ビ (6′) カラ $g(x)$ ハ恒等的ニ零デ, 従ッテ $f(x)$ ハ *null* デアル。